Diskrete Mathematik Übungsstunde Zusammenfassung

Leon Kolmanić

25.09.2023

1 Organisation

1.1 Kontaktmöglichkeiten und Links

Ihr könnt mich unter den folgenden Kontaktmöglichkeiten jederzeit erreichen falls ihr Fragen zur Organisation oder zum Stoff habt.

- Mail Adresse: leon.kolmanic@inf.ethz.ch
- Mein Discord Nutzername ist lendand, ihr findet mich auf dem D-INFK Discord Server: https://discord.gg/eth-dinfk
- Website mit zusätzlichen Materialien und Zusammenfassungen: https://leonkolmanic.com/teaching

Hier findet ihr die beiden wichtigen Websites zum Kurs, die alle relevanten Informationen, das Skript und die Übungsaufgaben enthalten. Das sollten eure erste Anlaufstellen für organisatorische Fragen und Lernmaterialien sein.

- Kurswebsite: https://crypto.ethz.ch/teaching/DM23/
- Übungsblätter und Abgabe: https://dm.crypto.ethz.ch

1.2 Übungsaufgaben Ablauf

- Übungsblätter erscheinen jede Woche am Freitagmorgen.
- Jedes Blatt enthält eine Bonusaufgabe
- Abgabe der Bonusaufgabe ist jeweils in der darauffolgenden Woche am Donnerstag um 23:59 Uhr auf https://dm.crypto.ethz.ch
- Bei technischen Problemen bei der Abgabe rechtzeitig eine Mail mit der Datei an mich schicken, damit ihr trotzdem Punkte bekommt
- Bonusnotenberechnung findet ihr auf der Kurswebsite

1.3 Übungsstunden Ablauf

- Besprechung der Bonusaufgabe letzter Woche
- Stoffwiederholung und Fragen klären
- zusammen Aufgaben üben
- Vorbereitung auf die nächste Bonusaufgabe und Tipps

Wir werden in der Übungsstunde Aufgaben ähnlich zu denen auf den Übungsblättern lösen, nicht die Übungsaufgaben selbst. Diese sind zu eurer eigenen Wiederholung und Vertiefung da.

1.4 Tipps für die ETH und DiskMat

Hier noch einige Tipps, die mir persönlich sehr geholfen haben das Semester zu überstehen.

- Besucht regelmässig die Übungsstunden und Vorlesungen, das gibt euch Struktur und Austausch mit Kommilitonen ist wichtig
- Lest oder überfliegt vor jeder Vorlesung die relevanten Abschnitte im Skript
- Investiert viel Zeit in die Übungsaufgaben, versucht so viele wie möglich zu lösen
- Bombardiert mich ruhig mit Fragen in den Übungsstunden und über meine Kontaktmöglichkeiten:)
- Plant genug Freizeit ein, geht regelmässig an die frische Luft und überarbeitet euch nicht!

2 Wiederholung Stoff

2.1 Einleitung und Motivation (Kapitel 1 Skript)

- Diskrete Mathematik ist zentral für die Informatik und hat wichtige Anwendungen in z.B. Kryptographie
- Ihr lernt in der Vorlesung Beweise schreiben und verstehen, das werdet ihr in allen anderen Fächern im 1. Semester brauchen und in den meisten Fächern später im Studium

2.2 Einführung in die Aussagenlogik und mathematisches Denken

2.2.1 Aussagen und Beweise (Kapitel 2.1 und 2.2 Skript)

Folgende zwei Begriffe sind von zentraler Bedeutung für die Vorlesung:

- wir nennen eine Aussage *mathematische Aussage*, wenn sie so präzise und objektiv formuliert ist, dass sie nach den Gesetzen der Mathematik eindeutig wahr oder falsch ist.
- Ein *Beweis* ist ein mathematisches Argument, warum eine Aussage gilt, das lückenlos, korrekt und präzise ist. Im Verlauf der Vorlesung werdet ihr mehr Intuition für diesen abstrakten Begriff erhalten.

Eine wichtige Art von Aussage ist die Implikation, die wir so notieren: $S \implies T$. Sie ist wahr falls gilt: Falls S wahr ist, ist T wahr. Sonst ist sie falsch. Insbesondere ist eine Implikation wahr wenn S falsch ist und dann spielt es keine Rolle was T ist.

2.2.2 Einführung in die Aussagenlogik (Kapitel 2.3 Skript)

In der Aussagenlogik untersuchen wir Formeln, die aus logischen Operatoren, Klammern und aussagenlogischen Symbolen (Variablen, wie A, B, C, ...) bestehen. Es gibt nur zwei Werte, die die aussagenlogischen Symbole annehmen können, wahr (1) und falsch (0). Jeder Operator ist durch eine Wahrheitstabelle definiert, somit kann man zu jeder Formel eine Wahrheitstabelle bestimmen.
Das ist wichtig für die Übungen und die Prüfung: Wenn in einer Aufgabe ein Beweis verlangt ist, dass zwei Formeln äquivalent sind oder dass eine Formel logische Konsequenz einer anderen ist, reicht es aus, die Wahrheitstabellen beider Formeln zu berechnen und über diese zu argumentieren.

3 Übungausaufgaben

Lösung Übungsaufgabe 1.1: Das Schachbrett

Für die a) ist es wichtig zu erkennen, dass ein Fall gleich funktioniert, wenn ihr ihn an den Diagonalen, der Vertikalen oder der Horizontalen spiegelt. So

kommt ihr auf 10 Fälle.
Für die b) könnt ihr auf dieser Website Lösungen für alle Fälle finden.

Lösung Übungsaufgabe 1.2: Ein falscher Beweis

Das Problem in diesem Beweis ist direkt die erste Zeile. Hier wird behauptet, dass es eine grösste natürliche Zahl gibt und diese wird n zugewiesen. Unter der Annahme, dass es eine solche Zahl gibt ist der Beweis korrekt. Weil diese Aussage falsch ist, ist der Beweis wertlos. In einem Beweis dürft ihr nur auf Tatsachen aufbauen, die trivial sind, ihr schon bewiesen habt oder die im Skript stehen.

Ähnliche Aufgabe zu Übungsaufgabe 1.3

Gegeben seien die folgenden Aussagen:

- A: Max hat einen Regenschirm dabei.
- B: Es regnet.

a)

Interpretiere die folgenden Formeln:

$$F_1 = A \to B$$
$$F_2 = (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$$

Lösung: Bei dieser Aufgabe muss man die Operatoren in entsprechende Formulierungen übersetzen, also z.B. $\land$ zu "und" und $\to$ zu "Wenn (...), dann (...)". F_1 entspricht also "Wenn Max einen Regenschirm dabei hat, regnet es" und F_2 entspricht "Einer der zwei folgenden Fälle tritt ein: Max hat einen Regenschirm dabei und es regnet. Max hat keinen Regenschirm dabei und es regnet nicht", was sich einfacher ausdrücken lässt mit "Max hat einen Regenschirm dabei genau dann wenn es regnet".

b)

Übersetze die folgenden Aussagen zu Formeln:

- F_3: Max hat seinen Regenschirm dabei oder es regnet.
- F_4: Wenn es nicht regnet, hat Max seinen Regenschirm nicht dabei.

Lösung: Analog zu oben gilt:

$$F_3 = A \lor B$$
$$F_4 = \neg B \to \neg A$$

c)

Schreibe die Negation von F_3 als Formel und als Satz auf.
Lösung: Wir stellen einfach ein $\neg$ an die Formel an und verwenden Lemma 2.1 aus dem Skript, genauer die Morgansche Regel:

$$\neg F_3 \equiv \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Jetzt übersetzen wir die umgeformte Formel zu einem Satz: "Max hat seinen Regenschirm nicht dabei und es regnet nicht".

Ähliche Aufgabe zu Übungsaufgabe 1.4

Gesucht sei die Wahrheitstabelle der folgenden Formel:

$$F = \neg(\neg A \wedge (B \vee C))$$

Lösung: Damit man sich bei komplizierten Formeln wie dieser nicht verrechnet, teilt man sie in Teilformeln auf, wie z.B. $(B \vee C)$ und berechnet für diese die Wahrheitstabelle zuerst. So geht man Stück für Stück vor, bis man die Wahrheitstabelle der ganzen Formel berechnet hat.

A	B	C	$\neg A$	$B \vee C$	$\neg A \wedge (B \vee C)$	$\neg(\neg A \wedge (B \vee C))$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

Ähnliche Aufgabe zu Übungsaufgabe 1.5 (Bonus)

Eine Aufgabe vom letzten Jahr, die ähnlich zur aktuellen Bonusaufgabe ist, lautet wie folgt:

We define two binary logical operators $\heartsuit$ and $\square$ as follows:

A	B	$A \heartsuit B$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	$A \square B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a)

Do the formulas $F_1 = A \heartsuit (B \heartsuit C)$ and $F_2 = (A \heartsuit B) \heartsuit C$ have the same function table? What about the formulas $G_1 = A \square (B \square C)$ and $G_2 = (A \square B) \square C$? Justify both of your answers.

b)

Find a formula F involving only $\heartsuit$ and $\square$ that has the following function table:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

No justification is required.

Lösung: Die a) ist simpel. Wir bestimmen die Wahrheitstabellen mit der obigen Methode, damit keine Leichtsinnsfehler passieren, und schreiben einen Antwortsatz dazu (wichtig, sonst bekommt ihr nicht alle Punkte). Hier sind die Wahrheitstabellen:

A	B	C	$A \heartsuit B$	$B \heartsuit C$	F_1	F_2
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1

A	B	C	$A \square B$	$B \square C$	G_1	G_2
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Also haben F_1 und F_2 nicht die gleichen Wahrheitstabellen, G_1 und G_2 aber schon.

Bei der c) hilft vor allem viel Herumprobieren und etwas Glück. Es gibt aber zwei Tricks. Erstens könnt ihr euch Konstanten bauen, indem ihr die Operatoren auf bestimmte Weise einsetzt. Zum Beispiel ist die Formel $A \heartsuit A$ immer falsch, unabhängig von A. Zweitens könnt ihr auf Gemeinsamkeiten in den Wahrheitstabellen achten. Die Wahrheitstabelle von dem $\heartsuit$ Operator ähnelt der von der Negation von F:

A	B	$A \heartsuit B$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	F	$\neg F$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Wenn wir die Operanden umdrehen erhalten wir die Formel $B \heartsuit A$ mit Wahrheitstabelle:

A	B	$B \heartsuit A$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Es gilt $B \heartsuit A \equiv \neg F$. Wir müssen noch einen Weg finden, den $\neg$ Operator nur mit $\heartsuit$ und $\square$ umzusetzen. Zuletzt bemerken wir, dass der $\square$ Operator wenn der rechte Operand 0 ist die Negation des linken als Ergebnis hat, informell geschrieben $A \square 0 \equiv \neg A$ (bitte nicht so in Übungen/der Klausur schreiben). Fügen wir beide Tricks zusammen erhalten wir die Formel $(B \heartsuit A) \square (A \heartsuit A)$, die die gewünschte Wahrheitstabelle hat. Wichtig bei solchen Aufgaben ist es eure Formeln vollständig zu klammern, so dass die Reihenfolge der Operationen eindeutig ist. Ihr dürft bei der Bonusaufgabe Klammern verwenden, diese zählen nicht als Operator.

Hinweis Übungsaufgabe 1.6

Bei diesen Aufgaben ist es wichtig, dass ihr in jedem Schritt nur eine Umformung macht und immer eine Regel anwendet, die ihr genau so im Lemma 2.1 aus dem Skript vorfindet. Beispielsweise ist die Umformung

$$(B \vee C) \wedge A \equiv (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$$

in einer solchen Aufgabe nicht erlaubt, weil das Distributivgesetz im Lemma andersherum notiert ist.
Es ist allerdings in Ordnung, die Regeln auf der Ebene von Formeln anzuwenden. Die folgende Umformung mit dem Kommutativgesetz

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \equiv (C \vee D) \wedge (A \vee B)$$

ist erlaubt, weil wir für die aussagenlogischen Symbole A und B, die im Lemma 2.1 vorkommen, die Teilformeln $(A \vee B)$ und $(C \vee D)$ eingesetzt haben.