Theorie Wiederholung

Syntax: Was ist eine Formel?
Was sind Variablensymbole,
Funktionssymbole, ... ?

Semantik: Welche Variablen sind
frei? Welchen Wahrheitswert haben Formeln für
eine gewisse Interpretation?

$\mathcal{A}$ wird häufig als Symbol für
Interpretationen benutzt

Interpretation $\mathcal{A}$

Aussagenlogik	Prädikatenlogik
Belegung von Variablen $A, B, C, \ldots$ mit Wahrheitswert	Belegung von Variablen, Prädikaten, Funktionen und ein Universum

$\mathcal{A}(F)$ Kurzschreibweise für $\sigma(\mathcal{A}, F)$
Ist F wahr unter Interpretation $\mathcal{A}$?

Beispiel: $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = 1$
Dann $\mathcal{A}(A \wedge B) = \sigma(\mathcal{A}, F) = 1$

Oft verwirrend:

$\mathcal{A}_{[x \to v]}$??

$\mathcal{A}$ ist eine Interpretation, also weist Variablen Werte zu. $\mathcal{A}(A) = 1$ bedeutet, dass $\mathcal{A}$ der Variable A den Wert 1 zuweist.

$\mathcal{A}_{[x \to v]}$ ist auch eine Interpretation, und zwar die Interpretation, die man erhält, wenn man $\mathcal{A}$ so modifiziert, dass x der Wert v zugewiesen wird, aber alles andere beibehält.

Sei zum Beispiel

$$\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = 1$$

Dann

$$\mathcal{A}_{[A \to 0]}(A) = 0 \leftarrow \text{modifiziert}$$

$$\mathcal{A}_{[A \to 0]}(B) = 1 \leftarrow \text{unverändert}$$

Diese modifizierten Interpretationen braucht man für die Semantik von Prädikatenlogik.

Beispiel: Um zu prüfen, ob $\mathcal{A}(\forall x\, P(x)) = 1$, nehmen wir $\mathcal{A}$ und betrachten potentiell unendlich viele Interpretationen $\mathcal{A}_{[x \mapsto u]}$, für jedes $u \in U^{\mathcal{A}}$ eine. Falls für all diese $u \in U^{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}_{[x \mapsto u]}\, P(x) = 1$ gilt, ist $\mathcal{A}(\forall x\, P(x)) = 1$.

Jetzt: Beweise über Formeln

- Argumentieren mit Semantik
- Logik ist über natürliche Sprache definiert: Wir übersetzen $\mathcal{A}(F) = 1$ in eine Aussage, deren Wahrheitswert klar ist und die in natürlicher Sprache formuliert ist

Wir erweitern Prädikatenlogik um einen neuen Quantifizierer Δ (gesprochen: für unendlich viele)

Syntax: If F is a formula, then for any variable symbol x_i, $\Delta x_i F$ is a formula

Semantics: $\mathcal{A}(\Delta x_i F) = 1$ if and only if $\{ v \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x_i \to v]}(F) = 1 \}$ is infinite

Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\neg \Delta x P(x))$ ist unerfüllbar

b) $(\forall x\, \neg P(x)) \wedge (\Delta x P(x))$ ist unerfüllbar

c) $\Delta x (F \wedge G) \models \Delta x F \wedge \Delta x G$ für alle Formeln F und G

d) $\neg P(x) \models \neg \Delta x\, P(x)$

a) Aussage falsch

$\mathcal{U}^{\mathcal{A}} = \{0\}$

$P^{\mathcal{A}}(0) = 1$

$\mathcal{A}(\forall x\, P(x)) = 1$ weil $P(0) = 1$, aber $\{u \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \to u]}(P(x)) = 1\}$ ist endlich, somit $\mathcal{A}(\Delta x\, P(x)) = 0$ und damit $\mathcal{A}(\neg \Delta x\, P(x)) = 1$.

Also ist $\mathcal{A}$ ein Modell für die Formel.

b) Aussage wahr

Man nehme zwecks Widerspruch an, es existiere ein Modell $\mathcal{A}$ für $F = (\forall x \neg P(x)) \wedge (\Delta x\, P(x))$.

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}(F) = 1$ (Def. Modell)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}(\forall x \neg P(x)) = 1$ und

$\mathcal{A}(\Delta x\, P(x)) = 1$ (Semantik $\wedge$)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}_{[x \to u]}(\neg P(x)) = 1$ für alle $u \in U^{\mathcal{A}}$

und $\mathcal{A}(\Delta x\, P(x)) = 1$ (Semantik $\forall$)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}_{[x \to u]}(P(x)) = 0$ für alle $u \in U^{\mathcal{A}}$

und " (Semantik $\neg$)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ " und $\{u \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \to u]}(P(x)) = 1\}$

ist unendlich (Semantik Δ)

$\stackrel{\cdot}{\Rightarrow}$ " und $\mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(P(x)) = 1$

für ein $u \in U^{\mathcal{A}}$

(unendliche Menge ist nicht leer)

Das ist ein Widerspruch.

Also ist F unerfüllbar.

c) Aussage wahr

Seien F und G prädikatenlogische Formeln. Sei $\mathcal{A}$ eine für $\Delta x(F \wedge G)$ und $\Delta x F \wedge \Delta x G$ passende Interpretation, sodass $\mathcal{A}(\Delta x(F \wedge G)) = 1$.

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\{u \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(F \wedge G) = 1\}$ ist unendlich (Semantik Δ)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\{u \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(G) = 1\}$ ist unendlich (Semantik Δ)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\{u \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(F) = 1\}$ und $\{u \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(G) = 1\}$ sind unendlich ($A \cap B$ unendlich $\Rightarrow$ A und B unendlich)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}(\Delta x F) = 1$ und $\mathcal{A}(\Delta x G) = 1$ (Semantik Δ)

$\overset{\circ}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}(\Delta x F \wedge \Delta x G) = 1$ (Semantik $\wedge$)

d) $\neg P(x) \models \neg \Delta x\, P(x)$

Die Aussage ist falsch. Betrachte $\mathcal{A}$ mit

$$U^{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$$
$$P^{\mathcal{A}}(x) = 1 \iff x \geq 1$$
$$x^{\mathcal{A}} = 0$$

$\mathcal{A}(\neg P(x)) = 1$, weil $x^{\mathcal{A}} = 0$ und $P(0) = 0$. Aber $\mathcal{A}(\neg \Delta x\, P(x)) = 0$, weil $\{v \in U^{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}_{[x \mapsto v]}(P(x)) = 1\}$ $= \mathbb{N} \setminus \{0\}$ unendlich ist.