

Diskrete Mathematik Übungsstunde

Zusammenfassung

Leon Kolmanić

18.12.2023

1 Besprechung Bonusaufgabe

Bei dieser Aufgabe hatten die meisten von euch Schwierigkeiten mit der Definition von \circlearrowleft . \exists bedeutet, dass es ein Element im Universum gibt, dass die Bedingung erfüllt. \forall bedeutet, dass alle Elemente die Bedingung erfüllen. \circlearrowleft bedeutet, dass die Menge der Elemente, die die Bedingung erfüllen, gleichmächtig mit dem Universum ist. Falls das Universum endlich ist, hat \circlearrowleft die gleiche Semantik wie \forall , weil gleichmächtig für endliche Mengen gleiche Kardinalität impliziert. Aber bei unendlichen Mengen muss das nicht stimmen. Zum Beispiel ist $A = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen, d.h. $A \neq \mathbb{N}$ und $A \subseteq \mathbb{N}$. Aber trotzdem sind die Mengen gleichmächtig, $A \sim \mathbb{N}$. Das ist die Idee der Musterlösung bei den Gegenbeispielen zu a) und c). Für die b) muss man den Fakt verwenden, dass eine nicht leere Menge nicht zu der leeren Menge gleichmächtig sein kann. Man könnte das so formulieren:

Theorem. *Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Dann $A \not\sim \emptyset$.*

Der Beweis ist relativ einfach, ihr konntet diesen Fakt in dieser Aufgabe als trivial voraussetzen. Falls es euch interessiert:

Beweis. Man nehme zwecks Widerspruch an es gibt eine Menge $A \neq \emptyset$ mit $A \sim \emptyset$. Dann gibt es eine Bijektion $f : A \rightarrow \emptyset$. Wegen $A \neq \emptyset$ gibt es ein $u \in A$. Nach Definition von f $f(u) \in \emptyset$. Es folgt, dass die leere Menge nicht leer ist, $\emptyset \neq \emptyset$, ein Widerspruch. \square

Mit dem Theorem erhält man das folgende Korollar, das in der Lösung der b) angewendet wird. Dabei ist A die Menge der Elemente, die die Bedingung erfüllen und B das Universum.

Korollar. *Seien A und B Mengen, sodass $A \sim B$ und $B \neq \emptyset$. Dann $A \neq \emptyset$.*

Beweis. Man nehme zwecks Widerspruch an es gibt Mengen A und B mit $A \sim B$, $B \neq \emptyset$ und $A = \emptyset$. Aus $A \sim B$ und $A = \emptyset$ folgt $\emptyset \sim B$. Mit dem Theorem (Kontraposition) folgt $B = \emptyset$, ein Widerspruch. \square

2 Klausur FS23

Einige Hinweise, zu den Aufgaben, die wir besprochen haben:

- Aufgabe 1 d)
 - Poset Beweise laufen immer genau gleich ab und kommen häufig in der Klausur vor. Es lohnt sich, diese zu üben
 - Ihr müsst die drei Eigenschaften reflexiv, antisymmetrisch und transitiv zeigen. In meiner Zusammenfassung von Woche 5 und von Woche 6 findet ihr Tabellen mit den Eigenschaften und Standardsätzen.
- Aufgabe 1 e)
 - Bei Countability/Uncountability ist es wichtig, zuerst die gegebene Menge zu verstehen
 - In dieser Aufgabe geht es um die unendlich langen Sequenzen von natürlichen Zahlen, die irgendwann periodisch sind. Das heisst, es geht um Folgen, die sich zunächst beliebig verhalten und dann in ein periodisches Muster übergehen. Zum Beispiel **1, 2, 7, 4, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...**
 - Die Idee bei der Aufgabe ist es nun, dass sich jede solche Sequenz, obwohl sie unendlich lang ist, durch zwei endlich lange Zahlensequenzen beschreiben lässt, und zwar durch den **Anfang** und einen Ausschnitt des **periodischen Teil**.
 - Für den Beweis muss man nun eine Injektion angeben, die jeder unendlich langen Sequenz eine solche endliche Folge zuordnet. Die technischen Details könnt in der Prüfungssammlung finden.
- Aufgabe 3 c)
 - Das ist eine Aufgabe mit einem sehr einfachen Beweis, ihr braucht keine kreativen Ideen oder Tricks
 - Weil ihr ein “if and only if” \iff zeigen müsst, müsst ihr zwei separate Beweise führen. Trennt diese am besten klar. Dann erhöht ihr eure Chancen Teilpunkte zu bekommen, falls ihr zum Beispiel nur eine Richtung geschafft habt.
- Aufgabe 4 d)
 - Das ist die schwierigste Aufgabe, die ich bis jetzt zur Semantik von Prädikatenlogik in den Altklausuren gesehen habe. Falls ihr diese verstanden habt, versteht ihr wahrscheinlich alle anderen auch.
 - Im Beweis sind vor allem zwei Schritte untypisch/schwierig:
 - * Wir müssen die Funktion f in die Formel reinbekommen. Dafür überlegen wir uns: Es ist egal, ob unsere Interpretation z den Wert $f^A(u)$ zuweist und z in der Formel steht, oder ob unsere

Interpretation z den Wert u zuweist und $f(z)$ in der Formel steht. Am Ende erhalten wir bei der Auswertung des Wahrheitswerts der Formel in beiden Fällen den Wert $f^A(u)$.

- * Statt dass unsere Interpretation x den Wert x^A zuweist, können wir auch y den gleichen Wert x^A zuweisen und dafür jedes Vorkommen von x in der Formel durch y ersetzen. Das dürfen wir so machen, weil y in der Formel davor noch nicht frei vorkommt. So “landet” der gleiche Wert an all den Stellen, wo er vorher auch schon war.
- Falls ihr den Beweis nicht ganz nachvollziehen könnt, lest die entsprechenden Abschnitte im Skript über die Semantik der Prädikatenlogik. Auf diesem Weg werdet ihr euer Verständnis für die Prädikatenlogik verbessern.

3 Tipps zur Lernphase und Klausur

- Ihr habt ein anstrengendes Semester hinter euch. Nimmt euch in den Ferien ein paar freie Tage, die habt ihr euch redlich verdient:)
- Wenn ihr mit dem Lernen für DiskMat beginnt:
 - Fangt damit an, euer Cheat Sheet zu schreiben und im Skript die Kapitel zu lesen, bei denen ihr euch nicht so sicher fühlt. Das Skript ist eine hervorragende Ressource. Wenn ihr das meiste darin verstanden habt, seid ihr schon sehr gut für die Klausur gerüstet. Schaut euch nur externe Materialien an, um euch beim Verstehen vom Skript zu helfen, aber ersetzt es auf keinen Fall damit.
 - Fangt danach an, so viele Altklausuren wie möglich zu lösen. Wenn ihr bei einer Aufgabe total auf dem Schlauch steht und vermutet, dass ihr etwas vom Vorlesungsstoff nicht ganz verstanden habt, recherchiert dazu im Skript. Fangt früh damit an, die Klausuren unter Realbedingungen zu schreiben, also mit Timer auf 3 Stunden und ohne externe Hilfe. Seid beim Korrigieren streng mit euren Lösungen. Ihr könnt euch mit anderen zusammen tun und ein Peer-Grading durchführen.
- Die Klausur ist schwierig, aber fair. Viele der Aufgabentypen wiederholen sich und lassen sich sehr gut üben, vor allem die Kurzfragen. Ihr habt ausreichend Zeit und die Erwartung ist längst nicht, dass ihr alle Aufgaben schafft. Auch nicht, wenn ihr eine glatte 6 vor Bonus wollt. In DiskMat ist es aber sehr wichtig, dass ihr eine Aufgabe gründlich löst, falls ihr euch dazu entscheidet, sie zu versuchen. Ihr werdet kaum Punkte bekommen, wenn ihr bei jeder Aufgabe ein bisschen um den heißen Brei herumschreibt, statt kurze, überzeugende Beweise zu liefern. Lasst lieber Aufgaben aus, bei denen ihr keine Ahnung habt, und nutzt die Zeit für die Aufgaben, bei denen ihr euch sicher fühlt.

- Macht euch kurz vor der Klausur nicht unnötig verrückt. Konzentriert euch auf die Aufgaben und Themen, die ihr könnt und verstanden habt, statt euch mit den schwierigen Themen herunterzuziehen. Schlaft die Nacht davor aus. Kommt frühzeitig zum Prüfungslokal, denn es kann sehr gut passieren, dass ihr den Raum zuerst nicht findet. Kontaktiert sofort die Prüfungsplanstelle (Tel. 044 632 20 68), falls ihr zu spät kommt. Es kann sein, dass ihr die Prüfung mit weniger Zeit trotzdem schreiben könnt. Auch bei Krankheit, wenn ihr den Raum nicht finden könnt, ... ruft sofort die Prüfungsplanstelle an. Denkt daran, die folgenden Sachen mitzunehmen:

- Einen Stift, Backupstift und Totalausfallstift)
- Euer Cheat Sheet
- Trinken
- Snacks
- Legi
- Ohrstöpsel
- Wecker oder Uhr (das wird immer vergessen, kann aber sehr hilfreich sein!)

Wenn ihr während der Lernphase Fragen habt, könnt ihr mir gerne eine E-Mail schreiben. Da ich selber Klausuren habe, werde ich aber nicht so schnell antworten können wie unter dem Semester.

Ich wünsche euch schöne Feiertage, viel Durchhaltevermögen für die Lernphase und viel Glück und Erfolg in den Prüfungen!