Diskrete Mathematik Übungsstunde Zusammenfassung

Leon Kolmanić

02.10.2023

1 Besprechung Bonusaufgabe

a) und b)

Häufige Fehler bei der a) und b) waren:

- Wahrheitstabellen falsch berechnet
- $=$ und $\equiv$ verwechselt (kein Abzug)
- Keinen Antwortsatz geschrieben (kein Abzug)

Ihr habt bei der a) und b) jeweils zeigen sollen, dass die Formeln äquivalent sind oder nicht, also die gleichen Wahrheitstabellen haben oder nicht. Schreibt in so einem Fall dann nicht z.B. 'the formulas are not equal' sondern 'the formulas are not equivalent'. Dass die Formeln nicht equal sind ist klar (weil sie anders aussehen). Wenn ihr das schreibt, habt ihr also nicht das gezeigt, was verlangt wird.
Es ist wichtig, dass ihr vor allem bei prove/disprove Aufgaben immer einen Antwortsatz schreibt, sonst könnte es Abzug in der Prüfung geben.

c)

Häufige Fehler waren:

- Unerlaubter Operator verwendet
- Keine Klammern gesetzt (kein Abzug)

Ihr durftet bei dieser Aufgabe nur A, B, C, $\heartsuit$ und Klammern verwenden.
Hier war es in Ordnung keine Klammern zu setzen, weil $\heartsuit$ assoziativ ist, aber das muss nicht bei allen Operatoren der Fall sein. Deshalb lieber auf Nummer sicher gehen und Klammern setzen.

2 Kahoot

Hier die Fragen vom Kahoot und Lösungen. Bis auf die Fragen 3 und 9 waren alle Fragen vom Typ wahr/falsch.

2.1 Fragen

1. $A \Rightarrow (B \vee C)$ ist eine syntaktisch korrekte Formel der Aussagenlogik.
2. $A \wedge B \equiv A \rightarrow B$ ist eine mathematische Aussage.
3. Zu was ist $A \rightarrow B$ äquivalent? $A \vee B$, $\neg A \vee B$, $A \vee \neg B$ oder $\neg A \vee \neg B$?
4. Seien F und G beliebige aussagenlogische Formeln, so dass F unerfüllbar ist. Dann ist $F \rightarrow G$ Tautologie.
5. Für beliebige aussagenlogische Formeln F und G: $F \wedge G$ ist erfüllbar $\iff$ F ist erfüllbar und G ist erfüllbar
6. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ist Tautologie.
7. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$
8. $P(x) \vee Q(y) \equiv Q(x) \vee P(y)$
9. In welchem der folgenden Universen ist $\forall x \forall y \exists u ((x < y) \rightarrow ((x < u \wedge u < y)$ wahr? In $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$?
10. $\exists y \forall x P(x, y)$ ist logische Konsequenz von $\forall x \exists y P(x, y)$

2.2 Lösungen

1. Falsch, weil das Zeichen $\Longrightarrow$ in aussagenlogischen Formeln nicht erlaubt ist, es ist nur $\rightarrow$ erlaubt.
2. Wahr, das ist eine Aussage über zwei Formeln. Sie ist aber falsch, weil die Formeln nicht die gleichen Wertetabellen haben.
3. $\neg A \vee B$, siehe die Definition von $\rightarrow$ im Skript.
4. Wahr, weil wenn der linke Operand von $\rightarrow$ falsch (0) ist, dann ist das Resultat vom Operator wahr (1).
5. Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $F = A$, $G = \neg A$. F und G sind beide erfüllbar, aber $F \wedge G = A \wedge \neg A$ nicht.
6. Wahr. Man kann sich schnell überlegen: Wenn $A = 0$ ist die ganze Formel wahr (Wertetabelle $\rightarrow$). Wenn $A = 1$ gilt $\neg A = 0$ und somit ist $\neg A \rightarrow B$ wahr. Somit ist auch die ganze Formel wahr. Wer das nicht intuitiv findet, kann auch die Wertetabelle berechnen.

7. Falsch. Es kann der Fall sein, dass es zwei Elemente a und b im Universum gibt. Für a gilt $P(a) = 1$ und $Q(a) = 0$, für b gilt $P(b) = 0$ und $Q(a) = 1$. Für eine solche Interpretation ist die rechte Formel wahr, die linke aber nicht.

8. Falsch. Ein Beispiel ist eine Interpretation, in der $P(x) = 1$, $P(y) = 0$, $Q(x) = 0$ und $Q(y) = 1$ gilt.

9. In $\mathbb{R}$, weil zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine andere reelle Zahl liegt.

10. Falsch. Ein Beispiel aus dem Alltag wäre eine Gruppe von Menschen als Universum und ein Prädikat P mit $P(x, y) \iff x$ und y sind befreundet. Wir nehmen an, dass man auch mit sich selbst befreundet sein kann. Die linke Formel behauptet, dass es eine Person gibt, die mit allen anderen und sich selbst befreundet ist. Die rechte Formel behauptet, dass jede Person mit jemandem befreundet ist. Es kann sein, dass letzteres erfüllt ist, ersteres aber nicht.

3 Aussagen und Formeln

3.1 Wichtige Zeichen und ihre Unterschiede

Zeichen	Typ	Bedeutung
$=$	$\underbrace{\text{Formel} = \text{Formel}}_{\text{Aussage}}$	Die Formeln sind exakt gleich. Zum Beispiel $A \wedge B \neq B \wedge A$, aber $A \wedge B = A \wedge B$.
$\equiv$	$\underbrace{\text{Formel} \equiv \text{Formel}}_{\text{Aussage}}$	Bei aussagenlogischen Formeln: Die Formeln haben die gleichen Wertetabellen. Bei Formeln der Prädikatenlogik: Die beiden Formeln haben den gleichen Wahrheitswert für *alle* passenden Interpretationen.

$\Longrightarrow$	$\underbrace{\text{Aussage} \Longrightarrow \text{Aussage}}_{\text{Aussage}}$	Mit diesem Zeichen bildet man eine neue Aussage. Diese ist wahr, falls die linke Aussage falsch ist oder die rechte wahr ist. In anderen Worten: Sie ist wahr, falls wenn die linke wahr ist, auch die rechte wahr ist. Sonst ist sie falsch. Dieses Zeichen werdet ihr vor allem in Aufgabenstellungen sehen, weil dort oft Aussagen definiert werden. Ihr werdet es eher selten schreiben.
$\Longleftrightarrow$	$\underbrace{\text{Aussage} \iff \text{Aussage}}_{\text{Aussage}}$	Mit diesem Zeichen bildet man eine neue Aussage. Diese ist wahr, falls entweder die linke und die rechte Aussage falsch sind oder beide Aussagen wahr sind.
$\stackrel{\cdot}{\Longrightarrow}$	$\underbrace{\text{Aussage}\stackrel{\cdot}{\Longrightarrow}\text{Aussage}}_{\text{Beweisschritt}}$	Mit diesem Zeichen zeigen wir eine Herleitung in einem Beweis an. Im Gegensatz zum Pfeil ohne Punkt wollen wir hier keine neue Aussage bilden. Das Zeichen bedeutet so viel wie: "Die linke Aussage gilt. Wir folgern jetzt aus der linken Aussage die rechte". Dieses Zeichen werdet ihr sehr oft selbst schreiben, weil ihr es in fast jedem Beweis braucht.
$\stackrel{\cdot}{\Longleftrightarrow}$	$\underbrace{\text{Aussage} \stackrel{\cdot}{\Longleftrightarrow} \text{Aussage}}_{\text{Beweisschritt}}$	Auch mit diesem Zeichen zeigen wir eine Herleitung in einem Beweis an, wir drücken aber noch zusätzlich aus, dass die Herleitung in beide Richtungen funktioniert. Also wir können auch aus der rechten Aussage die linke Aussage schliessen. Dieses Zeichen nutzt man, wenn man eine Implikation in beide Richtungen beweisen muss und beide Richtungen auf einmal beweisen möchte (statt zwei identische Herleitungen aufzuschreiben, eine für jede Richtung).

$\rightarrow$	$\underbrace{\text{Formel} \rightarrow \text{Formel}}_{\text{Formel}}$	Dieses Zeichen ist ein logischer Operator wie $\wedge$. Wir verwenden es nur in Formeln. Wenn wir hingegen etwas in einem Beweis herleiten oder Aussagen vom Typ Implikation notieren, verwenden wir $\dot{\Longrightarrow}$ und $\Longrightarrow$.
$\models$	$\underbrace{\text{Formel} \models \text{Formel}}_{\text{Aussage}}$	Bei aussagenlogischen Formeln: In jeder Zeile, in der die linke Formel eine 1 in der Wahrheitstabelle hat, hat die rechte auch eine. Bei Formeln der Prädikatenlogik: Für alle Interpretationen, für die die linke Formel wahr ist, ist die rechte Formel auch wahr.

3.2 Aussagen über Formeln

Hier beispielhaft einige Aussagen über Formeln, die viele der obigen Symbole benutzen, und wie wir sie verstehen können.

3.2.1 Aussage aus dem Skript

Man betrachte die folgende Aussage:

Behauptung. *Für alle Formeln F und G gilt:*

$$\underbrace{F \models G \Longrightarrow (\underbrace{F \text{ ist Tautologie} \Longrightarrow G \text{ ist Tautologie}}_{\text{Implikation 2}})}_{\text{Implikation 1}}.$$

Überlegen wir uns wieso das gilt: Seien F und G beliebige Formeln. Wenn G nicht logische Konsequenz von F ist, gilt Implikation 1, weil die linke Aussage der Implikation falsch ist. Falls andernfalls G logische Konsequenz von F ist, unterscheiden wir wieder zwei Fälle: Falls F keine Tautologie ist gilt Implikation 2, da die linke Aussage von dieser Implikation falsch ist. Weil die linke und rechte Aussage von Implikation 1 wahr sind gilt Implikation 1. Falls F hingegen eine Tautologie ist, ist G auch eine (G ist für alle Interpretationen wahr für die F wahr ist und F ist für alle Interpretationen wahr). Weil die rechte Aussage von Implikation 2 gilt, gilt Implikation 2 auch in diesem Fall und somit auch Implikation 1. Das war ein Beweis durch Fallunterscheidung, ihr seht diesem im Detail nächste Woche.

3.2.2 Selbst ausgedachte Aussage

Behauptung. *Seien F und G beliebige Formeln.*

$$F \text{ ist unerfüllbar} \Longrightarrow F \vDash G.$$

Wieso gilt diese Aussage? Falls F erfüllbar ist, gibt es nichts zu beweisen. Falls F unerfüllbar ist, macht man folgende Überlegung: $F \vDash G$ bedeutet genau, dass G für alle Interpretationen wahr ist, für die F wahr ist. Aber weil F unerfüllbar ist, gibt es keine Interpretationen, für die F wahr ist. Also ist die Aussage trivial erfüllt und es gilt $F \vDash G$.

4 Logische Formeln unformen

4.1 Verfahren

Bei solchen Aufgaben sind die Grading Schemes sehr streng. Ein ungültiger Schritt kann euch viele oder sogar alle Bonuspunkte kosten. Deswegen ist es besonders wichtig rigoros zu sein und bei jedem Schritt sicherzustellen, dass er erlaubt ist.
Um keine Fehler zu machen könnt ihr so vorgehen:

1. Wählt eine in der Formel vorkommende Teilformel
2. Wählt eine der Umformungsregeln, die im Lemma oder der Aufgabe gegeben sind
3. Bestimmt für jede der in in der Regel vorkommenden Variablen eine Formel, sodass eine der Seiten der Äquivalenz auf die gewählte Teilformel passt
4. Ersetzt die Teilformel durch die andere Seite der Äquivalenz

Auch Klammern umzusetzen zählt als Schritt, hier müsst ihr die Assoziativität verwenden!
Im Folgendem ein Beispiel für dieses Verfahren. Gegeben sei die Formel $(A \vee C) \rightarrow ((C \wedge A) \vee (B \vee A))$. Wir wählen zunächst eine Teilformel:

$$(A \vee C) \rightarrow (\underbrace{(C \wedge A) \vee (B \vee A))}_{\text{Teilformel}})$$

Dann wählen wir die Regel, in unserem Fall die Kommutativität von $\vee$. In der Regel kommen die Variablen A und B vor. Wir wählen für die Variable A die Formel $C \wedge A$ und für die Variable B die Formel $B \vee A$. Dann passt die linke Seite der Äquivalenz $A \vee B$ genau auf unsere gewählte Teilformel, wenn A und B durch die gewählten Formeln ersetzt werden. Lass euch hier nicht von der Dopplung der Variablen verwirren, man muss zwischen den Buchstaben in der Regel und denen in der Formel unterscheiden. Es kann am Anfang vielleicht helfen, die Regeln mit anderen Buchstaben umzuschreiben (z.B. X, Y und Z), dann gibt es keine Dopplung. Wir ersetzen die Teilformel nun durch die rechte Seite der Äquivalenz $B \vee A$, wobei wir A und B mit den gewählten Formeln ersetzen. Dann notieren wir das ganze noch ordentlich:

$$\begin{aligned}
&(...)\\
&\quad \equiv (A \vee C) \to ((C \wedge A) \vee (B \vee A))\\
&\quad \equiv (A \vee C) \to ((B \vee A) \vee (C \wedge A)) \text{ (commutativity of } \vee)
\end{aligned}$$

4.2 Beispielaufgabe

Wenn bei einer Aufgabe eine Umformung in einer bestimmten Anzahl Schritten gefragt ist, gibt es leider kein einfaches Rezept um die Lösung zu finden. Hier hilft nur viel Ausprobieren. Aber das korrekte Format ist einfach zu lernen. Deshalb hier noch eine Musterumformung:

$$\begin{aligned}
(\neg C \wedge (A \to B)) \vee C &\equiv (\neg C \wedge (\neg A \vee B)) \vee C \text{ (definition of } \to)\\
&\equiv C \vee (\neg C \wedge (\neg A \vee B)) \text{ (commutativity of } \vee)\\
&\equiv (C \vee \neg C) \wedge (C \vee (\neg A \vee B)) \text{ (second distributive law)}\\
&\equiv \top \wedge (C \vee (\neg A \vee B)) \ (A \vee \neg A \equiv \top)\\
&\equiv C \vee (\neg A \vee B) \ (\top \wedge A \equiv A)\\
&\equiv (\neg A \vee B) \vee C \text{ (commutativity of } \vee)\\
&\equiv \neg A \vee (B \vee C) \text{ (associativity of } \vee)\\
&\equiv A \to (B \vee C) \text{ (definition of } \to)
\end{aligned}$$

Zusätzlich könnt ihr euch noch die Musterlösung zur Aufgabe 1.6 anschauen. Ich kann sehr empfehlen, dass ihr euch bei der Abgabe an dieses Format haltet.

5 Einführung in die Prädikatenlogik

Konzepte der Prädikatenlogik:

- Prädikate, die eine bestimmte Anzahl Elemente aus dem Universum nehmen und wahr oder falsch zurückgeben
- Funktionen, die eine bestimmte Anzahl Elemente aus dem Universum nehmen und ein Element aus dem Universum zurückgeben
- Konstanten, das sind Funktionen ohne Argumente
- Die schon bekannten logischen Operatoren wie $\neg$ und $\to$
- Universen, also nicht leere Mengen
- Die beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$

Prädikatenlogische Formeln bestehen aus Quantoren, Funktionen, Konstanten und Operatoren. Eine Interpretation für eine Formel ist ein Universum zusammen mit Definitionen für alle vorkommenden Funktionen und Prädikate in der Formel. Eine prädikatenlogische Formel kann für jede Interpretation einen anderen Wahrheitswert annehmen, so wie aussagenlogische Formeln für verschiedene Zuweisungen der Variablen verschiedene Wahrheitswerte annehmen.

6 Übungsaufgabe zur Prädikatenlogik

Im Folgendem sind mit Zahlen immer ganze Zahlen gemeint.
Wir betrachten das Universum $\mathbb{Z}$, die Prädikate P und Q wobei

$$\begin{aligned} Q(x) = 1 &\iff x \text{ ist Quadratzahl} \\ P(x,y) = 1 &\iff x = y \end{aligned}$$

und die Funktion $sum(x,y) = x+y$. Diese bilden zusammen eine Interpretation. Nun möchten wir folgende Aussagen in Formeln ausdrücken, für die diese Interpretation passend ist:

1. Es gibt eine Quadratzahl
2. Die Summe zweier beliebiger Zahlen ist keine Quadratzahl
3. Für jede Zahl a gibt es eine Zahl b, sodass a + b eine Quadratzahl ist
4. Die Summe zweier Quadratzahlen ist Quadratzahl

Lösung:

1. $\exists x\, Q(x)$
2. $\forall x \forall y\, \neg Q(sum(x,y))$
3. $\forall x \exists y\, Q(sum(x,y))$
4. $\forall x \forall y\, ((Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow Q(sum(x,y)))$

Nun sollen noch diese Formeln in Aussagen übersetzt werden:

1. $\forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(x,y))$
2. $\forall x(Q(x) \rightarrow (\exists a \exists b\, P(x, sum(a,b))))$

Lösung:

1. Es gibt nur eine Quadratzahl (anders gesagt: Wenn zwei Zahlen Quadratzahl sind, sind sie gleich)
2. Jede Quadratzahl ist die Summe zweier Zahlen