Diskrete Mathematik Übungsstunde Zusammenfassung

Leon Kolmanić

09.10.2023

1 Besprechung Bonusaufgabe

Die Bewertung der Aufgabe war sehr streng. Auch geringfügige Fehler haben Abzug gegeben. Häufige Fehler waren:

- Doppelte Negation zweimal in einem Schritt angewendet (z.B. $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \equiv A \wedge B$)
- Keine $\equiv$ Zeichen zwischen den Formeln geschrieben
- Doppelte Negation verwendet, ohne sie als Begründung zu erwähnen (z.B. $\neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B$ statt $\neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee \neg\neg B \equiv \neg A \vee B$)
- 1. und 2. Distributivgesetz verwechselt
- Assoziativität falsch angewendet (z.B. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge B \wedge C$ statt $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$)
- Absorption falsch herum verwendet (z.B. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$ statt $A \wedge (B \vee A) \equiv A \wedge (A \vee B) \equiv A$)

Denkt immer daran, dass ihr nur eine Regel pro Schritt anwendet und immer die verwendete Regel hinschreibt. Es ist auch wichtig, dass ihr das Format der Musterlösung genau einhält. Weiter müssen die Regeln immer genau so, wie sie im Lemma stehen, angewendet werden. Obwohl die Absorption auch funktioniert, wenn die Formel vertauscht ist, dürft ihr das nicht in einem Schritt machen. Zuletzt müsst ihr auch beachten, dass ihr immer die Klammern so beibehält, wie sie sind. Ihr dürft die Klammerung nur mit der Assoziativität verändern. Es ist nicht erlaubt, mit Verweis auf die Assoziativität Klammern wegzulassen. Das gilt auch, wenn die Klammerung bei der gegebenen Formel keinen Unterschied macht. Ihr dürft Klammern nur entfernen, wenn sie offensichtlich unnötig sind, wie z.B. bei $F = ((A))$.

2 Übungsaufgabe Prädikatenlogik

Wir betrachten das Universum $U = \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sollen durch prädikatenlogische Formeln ausgedrückt werden. In den Formeln dürfen nur die Prädikate $\text{less}(x, y)$, $\text{equals}(x, y)$ und $\text{integer}(x, y)$ vorkommen. Statt $\text{less}(x, y)$ und $\text{equals}(x, y)$ sind die Kurzschreibweisen $x < y$ und $x = y$ auch erlaubt. Die binären Funktionen $+$ Addition und $\cdot$ Multiplikation sind auch definiert. Es dürfen Konstanten wie 0, 1, (...) verwendet werden. Die Division darf aber **nicht** verwendet werden. Es ist keine Begründung erforderlich.

i) Es gibt keine kleinste reelle Zahl.

ii) Jede Ganzzahl[1], die strikt grösser als 0 ist, ist das Produkt zweier Ganzzahlen.

iii) Nicht jede reelle Zahl ist rational.

iv) Wenn das Produkt zweier reeller Zahlen negativ ist, dann ist genau eine dieser Zahlen negativ.

v) Jede gerade Ganzzahl ist grösser gleich allen reellen Zahlen.

vi) Falls es eine reelle Zahl gibt, die strikt grösser und strikt kleiner als 0 ist, dann sind alle reellen Zahlen ganzzahlig.

Lösung:

i) $\neg\exists x \forall y (x < y \lor x = y)$

ii) $\forall x\, ((\text{integer}(x) \land 0 < x) \to \exists y \exists z\, (\text{integer}(y) \land \text{integer}(z) \land x = y \cdot z))$

iii) $\neg\forall x \exists p \exists q\, (\text{integer}(p) \land \text{integer}(q) \land \neg(q = 0) \land p = x \cdot q)$

iv) $\forall x \forall y (x \cdot y < 0 \to ((x < 0 \land \neg(y < 0)) \lor (y < 0 \land \neg(x < 0))))$

v) $\forall x \forall y ((\text{integer}(x) \land \exists b((x = 2 \cdot b) \land \text{integer}(b))) \to (y < x \lor y = x))$

vi) $(\exists a(a < 0 \land 0 < a)) \to (\forall a(\text{integer}(a)))$

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig zu beachten, dass ihr euch keine Gedanken darüber machen müsst, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Die Aussage v) ist zum Beispiel falsch. Es ist nur wichtig, dass ihr die Aussagen in eine korrespondierende Formel übersetzt. Ein häufiger Fehler bei diesen Aufgaben ist es, nicht definierte Prädikate oder Funktionen zu verwenden. Beispielsweise dürft ihr in euren Formeln **nicht** $\neq$ oder $>$ schreiben, weil nur $=$ und $<$ definiert wurden. Lest ausserdem genau die Aufgabenstellung, diese kann zusätzliche Funktionen wie Division ausschliessen. Ihr müsst auch nicht erklären, warum eure Formel die Aussage korrekt repräsentiert, schreibt bitte nur die Formel hin. Wenn ihr zur Prädikatenlogik mehr Übung braucht oder einen Überblick über die wichtigsten Konzepte haben wollt, könnt ihr hier in die Zusammenfassung letzter Woche schauen.

[1] engl.: integer

3 Proof Patterns

3.1 Übersicht

Das ist das wichtigste Kapitel im ganzen Skript. Ihr werdet in jedem Beweis in DiskMat und anderen Fächern diese Verfahren anwenden. Sie sind dadurch charakterisiert, was ihr annehmen dürft und was ihr zeigen sollt. Ausserdem funktionieren einige der Verfahren nur für bestimmte Aussagentypen. In der folgenden Tabelle erhaltet ihr eine Übersicht:

Proof Pattern	Wir wollen beweisen...	Wir dürfen annehmen...	Wir müssen zeigen...
Composition of Implications	$S \Longrightarrow T$	-	$S \Longrightarrow U$ und $U \Longrightarrow T$
Direct Proof	$S \Longrightarrow T$	S	T
Indirect Proof	$S \Longrightarrow T$	nicht T	nicht S
Modus Ponens	S	-	R und $R \Longrightarrow S$
Case Distinction	S	-	Mindestens eine der Aussagen $A_0, A_1, (...), A_n$ gilt und für alle i gilt $A_i \Longrightarrow S$
Proof by Contradiction	S	S ist falsch	Irgendeine falsche Aussage
Non-constructive Existence Proof	Es gibt ein x, so dass (...) gilt	-	Erklären, wieso es ein x geben muss, so dass für x (...) gilt
Constructive Existence Proof	Es gibt ein x, so dass (...) gilt	-	Ein x benennen und erklären, wieso für x (...) gilt
Proof by Counterexample	(...) gilt nicht für alle x	-	Ein x benennen und erklären, wieso für x (...) nicht gilt

3.2 Proof by Induction

Dieses Proof Pattern funktioniert nur bei einer ganz bestimmten Art von Aussagen: Für alle natürlichen Zahlen n gilt (...). Man geht wie folgt vor:

1. Man zeigt, dass (...) für 0 gilt (Induktionsstart)

2. Man nimmt an, dass (...) für ein n gilt (Induktionshypothese)

3. Man zeigt mithilfe der Induktionshypothese, dass (...) auch für $n + 1$ gilt (Induktionsschritt)

Es gibt auch andere Varianten, die Aussagen für alle ganzen Zahlen oder für alle natürlichen Zahlen ab einem Startwert zeigen. Hier könnt ihr mehr erfahren.

3.3 Pigeonhole Principle

Voraussetzungen für dieses Pattern:

- Es gibt n Objekte
- Es gibt $k < n$ Kategorien
- Jedes Objekt ist in genau einer Kategorie

Sind die Voraussetzungen gegeben, könnt ihr direkt folgern: Es gibt mindestens eine Kategorie, in der mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte sind.

4 Soundness von Proof Patterns

Stellt euch ein Proof Pattern wie ein Rezept vor: Ihr wollt ein bestimmtes Gericht kochen (eine Aussage beweisen). Nun gibt euch das Rezept (Proof Pattern) genaue Anweisungen, die ihr befolgen müsst. Wenn ihr fertig seid, erwartet ihr, dass ihr das gewünschte Gericht erhaltet und es gut schmeckt (die Aussage bewiesen ist). Nur Rezepte und Proof Patterns, für die das der Fall ist, wollen wir verwenden. Deshalb führen wir folgenden Begriff ein: Ein Proof Pattern ist *sound*, wenn man damit nur wahre Aussagen beweisen kann. Alle bisher vorgestellten Proof Patterns sind sound, Beweise für die Soundness einiger Pattern gibt es im Skript.

5 Soundness von Proof Patterns überprüfen

Wir überprüfen die Soundness von Proof Patterns mit Aussagenlogik. Zunächst ordnen wir der gewünschten Aussage eine Formel G zu. Dann übersetzen wir die Schritte des Proof Patterns in eine logische Formel F. Schliesslich überprüfen wir mittels Wahrheitstabellen, dass G logische Konsequenz von F ist.

6 Übungsaufgaben zur Soundness von Proof Patterns

Proof Pattern 1

Man betrachte das folgende Proof Pattern, um eine Aussage S zu beweisen:

1. Wähle geeignete Aussagen T_1 und T_2.
2. Zeige $T_1 \implies S$.

3. Zeige T_1 ist falsch $\Longrightarrow T_2$
4. Zeige T_2 ist falsch

Beweise oder widerlege: Das Proof Pattern ist sound.

Lösung: Wir vergeben zunächst aussagenlogische Symbole für die Aussagen: A soll für S stehen, B für T_1 und C für T_2. Dann übersetzen wir die Schritte in logische Formeln: Schritt 2 wird durch $B \to A$ beschrieben, Schritt 2 durch $\neg B \to C$ und Schritt 3 durch $\neg C$. Da wir im Proof Pattern alle Schritte durchführen, bilden wir das logische Und dieser Formeln, um F zu erhalten:

$$F = (B \to A) \wedge (\neg B \to C) \wedge \neg C$$

Da die zu beweisende Aussage S durch die Formel A repräsentiert wird, wählen wir $G = A$. Nun überprüfen wir ob folgende Aussage gilt, um die Soundness des Proof Patterns zu prüfen:

$$(B \to A) \wedge (\neg B \to C) \wedge \neg C \models A$$

Die Wahrheitstabelle sieht wie folgt aus:

A	B	C	$\neg B$	$B \to A$	$\neg B \to C$	$\neg C$	$(B \to A) \wedge (\neg B \to C) \wedge \neg C$	A
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1

Wir sehen: In jeder Zeile, in der die Formel F wahr ist (es gibt nur eine), ist die Formel $G = A$ wahr. Wir haben bewiesen: $F \models G$ und somit ist das Proof Pattern sound.

Proof Pattern 2

Man betrachte das folgende Proof Pattern, um eine Ausssage $S \Longrightarrow T$ zu beweisen:

1. Wähle eine geeignete Aussage R
2. Zeige S oder R
3. Zeige $R \Longrightarrow T$

Beweise oder widerlege: Das Proof Pattern ist sound.

Lösung: Wir gehen analog zum vorherigen Pattern vor. A soll für S stehen, B für T und C für R. Schritt 2 des Patterns entspricht der Formel $A \vee C$, Schritt 3 entspricht $C \to B$. Also lautet unsere Formel F:

$$F = (A \vee C) \wedge (C \to B)$$

Da wir $S \Longrightarrow T$ beweisen wollen, wählen wir $G = A \to B$. Wir überprüfen also die folgende Aussage:

$$(A \vee C) \wedge (C \to B) \models A \to B$$

Für die Wahrheitstabelle ergibt sich:

A	B	C	$A \vee C$	$C \to B$	$(A \vee C) \wedge (C \to B)$	$A \to B$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Wir sehen, dass für die Interpretation $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ F wahr ist, G aber nicht. Das heisst $F \not\models G$. Somit ist das Proof Pattern nicht sound.