Diskrete Mathematik Übungsstunde Zusammenfassung

Leon Kolmanić

16.10.2023

1 Besprechung Bonusaufgabe

1.1 Aussagen als Formeln formulieren

Häufige Fehler bei dieser Aufgabe waren:

- Falsche Verwendung von $\rightarrow$ und $\wedge$
- Für Variablen, die verschiedene Werte annehmen sollten, einen Quantor verwendet
- Nicht definierte Notationen und Prädikate verwendet: Division, Mengen (z.B. $\forall x \in \mathbb{Q}$), rational(x), Aufzählungen hinter Quantoren ($\forall x, y$), (...)
- Bei Aussagen vom Typ „Falls (...), dann (...)" (Implikation) Klammern falsch gesetzt (z.B. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(y)) \not\equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(y)$)
- Ungerade Zahlen in Formel falsch definiert

Wir verwenden $\rightarrow$, wenn wir eine Aussage für alle Elemente im Universum mit einer bestimmten Bedingung ausdrücken wollen. Ein Beispiel ist folgende (falsche) Aussage: Alle Ganzzahlen, die grösser als 5 sind, sind durch 2 teilbar. Als Formel schreibt man sie so:

$$\forall x((\text{integer}(x) \wedge 5 < x) \rightarrow (\exists a(\text{integer}(a) \wedge x = 2a)))$$

$\wedge$ wird verwendet, wenn für ein bestimmtes Element mehrere Sachen zutreffen sollen. Folgende Aussage ist ein Beispiel: Es gibt eine Ganzzahl, die durch 2 teilbar ist. Die Formel lautet: $\exists x(\text{integer}(x) \wedge (\exists a\, \text{integer}(a) \wedge x = 2a))$.
Nehmen wir an, wir wollen in einer Formel ausdrücken, dass x und y gerade sind. Die folgende Formel ist falsch: $\exists k(\text{integer}(k) \wedge x = 2k \wedge y = 2k)$. Das Problem ist, dass das k für x und y unterschiedlich sein könnte. Für $x = 2$ und $y = 4$ wäre die Formel beispielsweise nicht erfüllt, obwohl x und y gerade sind. Wir können das mit zwei Quantoren beheben: $\exists a \exists b(\text{integer}(a) \wedge \text{integer}(b) \wedge x = 2a \wedge y = 2b)$
Die Definition für eine ungerade Ganzzahl lautet $\exists k(\text{integer}(k) \wedge x = 2k + 1)$.
Die Definition $\exists k(\text{integer}(k) \wedge \neg(x = 2k))$ ist falsch. Diese ist für jede Zahl x wahr, weil man k immer so wählen kann, damit die Gleichung nicht erfüllt ist.

1.2 Soundness von Proof Pattern

- Äquivalenz und logische Folgerung verwechselt
- Informell argumentiert (ohne Aussagenlogik)
- Annahmen mit bewiesenen Aussagen verwechselt
- Nicht unterschieden, wann welche Annahmen gemacht werden

Wenn wir die Soundness eines Proof Patterns beweisen, reicht es aus, dass die Formel, die die zu beweisende Aussage repräsentiert, logische Konsequenz ($\models$) der Formel ist, die das Proof Pattern beschreibt. Es ist insbesondere nicht erforderlich, dass die beiden Formeln äquivalent ($\equiv$) sind.
Bei Aufgaben, die einen Beweis fordern, ist es wichtig zu erkennen, was für eine Art von Beweis erwartet wird und genau diese Art umzusetzen. Die Erwartung sollte immer durch die Aufgabenstellung klar werden. Ausserdem bietet das Skript viele Musterbeweise, die illustrieren bei welchen Aussagen welcher Beweis erwartet wird. Ihr könnt auch gerne mich dazu fragen, wenn ihr euch bei einer Aufgabe nicht sicher seid. Bei dieser Aufgabe war die Erwartung, dass man mit aussagenlogischen Konzepten argumentiert. Eine wörtliche Argumentation wurde dementsprečhed nicht akzeptiert.
Wenn wir in einem Proof Pattern eine Annahme machen, um eine Aussage zu beweisen, muss das nicht bedeuten, dass die angenommene Aussage wahr ist oder dass wir sie zeigen. Ein gutes Beispiel hierfür ist der Proof by Contradiction: Dort wollen wir S beweisen. Zunächst nehmen wir aber nicht S an und zeigen mit dieser Annahme eine falsche Aussage T. Ihr könnt das aus der Beschreibung des Pattern herauslesen: Wenn wir etwas annehmen sollen, steht in der Beschreibung *assume*, wenn wir etwas zeigen sollen *show*.
Ausserdem ist es wichtig zu erkennen, wann genau wir eine Annahme machen. Wenn in der Beschreibung steht „assume S and show T from this assumption. Then show R“ bedeutet das nicht, dass wir S annehmen dürfen um R zu zeigen. Wir nehmen S nur an, um T zu zeigen. Danach verwerfen wir die Annahme wieder.

2 Einführung in die Mengentheorie

In der Mengentheorie hat der Begriff Universum eine andere Bedeutung als in der Prädikatenlogik. Während wir in der Prädikatenlogik verschiedene Universen betrachten (jede Interpretation kann ein anderes fixieren), interessiert uns in der Mengentheorie nur ein Universum: Das Universum aller mathematischen Objekte. Dieses enthält unter anderem alle Mengen, also zum Beispiel $\mathbb{R}$, $\{1, 2, 3\}$ und $\varnothing$. Wenn wir im Kontext der Mengentheorie von Universum sprechen, meinen wir immer dieses. Wir definieren einige Prädikate, wie das Element-Prädikat E. $E(x, y)$ ist wahr genau dann, wenn x ein Element von y ist. Mit diesen fixen Definitionen der Prädikate und der fixen Wahl des Universums interpretieren wir alle Formeln, die wir im Kapitel der Mengenlehre sehen.

Weil die Interpretation fixiert ist, sind die Formeln alle (unter dieser Interpretation) wahr oder falsch. Deshalb können wir sie in diesem Kapitel verwenden, um mathematische Aussagen zu notieren.

3 $\in$ vs. $\subseteq$

Für viele Studierenden sorgen diese beiden Prädikate für viel Verwirrung. Ich möchte deshalb folgende Methode vorstellen, die dabei hilft, diese auseinanderzuhalten:
Sei eine konkrete, endliche Menge A gegeben, wobei wir eine Auflistung aller Elemente haben. Zusätzlich sei ein mathematisches Objekt x gegeben. Dieses kann beispielsweise eine Zahl oder eine Menge sein. Nun wollen wir prüfen, ob $x \in A$ gilt, also ob x in A enthalten ist. Wir gehen wie folgt vor: Zunächst streichen wir die äussersten Mengenklammern von A. Also wenn $A = \{1, \{2\}, 3\}$, machen wir daraus $1, \{2\}, 3$. So erhalten wir eine durch Kommas getrennte Liste von Objekten. Jetzt schauen wir einfach, ob x in dieser Liste erwähnt wird. Falls $x = 1$ ist dies der Fall, also $x \in A$. Falls hingegen $x = 2$, ist dies nicht der Fall, es folgt $x \notin A$ (es kommt $\{2\}$, nicht aber 2 in der Auflistung vor).
Wenn wir eine Analogie betrachten: Wären Mengen Eimer, schauen wir bei $x \in A$ ob x in dem Eimer A drin ist.
Nun zu $\subseteq$: Der erste wichtige Unterschied ist, dass $\subseteq$ nur zwischen zwei Mengen stehen kann. $A \subseteq B$ bedeutet in der Analogie: Alles, was im Eimer A drin ist, ist auch im Eimer B. Falls A kein Behältnis ist, können wir auch nicht darüber sprechen, dass alles was in A enthalten ist, auch in einem anderen Behältnis enthalten ist, weil in A ja gar keine Sachen enthalten sein können. Gleiches gilt, falls B kein Behältnis (keine Menge) ist.
Seien nun zwei endliche Mengen A und B gegeben, wobei wir eine Auflistung aller Elemente haben. Nun gehen wir bei beiden Mengen gleich vor: Wir streichen die Mengenklammern ganz aussen. Wir erhalten zwei Listen, in denen die Elemente durch Kommas getrennt sind. Also zum Beispiel für $A = \{\{\}, \{\varnothing\}\}$ und $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ erhalten wir $\{\}, \{\varnothing\}$ und $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$. Dann schauen wir, ob alle Einträge in der linken Liste auch in der rechten vorkommen. Wenn das der Fall ist, gilt $A \subseteq B$, andernfalls nicht. Hier ist das der Fall, wenn wir berücksichtigen, dass $\{\}$ und $\varnothing$ beides Notationen für die leere Menge sind, also verschiedene Zeichen für das gleiche.

4 Beispiele für Ausdrücke mit Mengen

Da im Kapitel über Mengentheorie zunächst sehr viele Operationen auf Mengen definiert werden, sind hier einige Beispiele mit konkreten Mengen. Es ist für jede Menge nach einer Auflistung aller Elemente gefragt.

1. $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$
2. $(\{\{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing\}) \times \{\varnothing, \varnothing\}$

3. $\{\varnothing, (0,1)\} \times \{\{0\} \cup \{1\}, \{1,0\}\}$
4. $\{0,1\} \times \{(0,1)\}$
5. $\mathcal{P}(\{\{\varnothing\}, \varnothing\})$

Lösung:

1. $\varnothing, \{\varnothing\}$
2. $(\{\varnothing\}, \varnothing), (\varnothing, \varnothing)$
3. $(\varnothing, \{0,1\}), ((0,1), \{0,1\})$
4. $(0, (0,1)), (1, (0,1))$
5. $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Bei diesen Aufgaben hilft es, den gegebenen Ausdruck schrittweise umzuformen, bis man direkt das Ergebnis bestimmen kann. Dann muss man ganz vorsichtig dabei sein, mit welchen Mengen man es zu tun hat. Die Aufgaben sind meistens so gestaltet, dass man leicht durcheinanderkommt.
Bei 1. sind keine Umformungen mehr nötig. Wir schauen uns die Menge in den Klammern von $\mathcal{P}$ an, diese ist $\{\varnothing\}$. Nennen wir diese A. Es ist wichtig zu sehen, dass A nicht die leere Menge ist, sondern die Menge, die die leere Menge enthält. Also in der Eimer-Analogie: Wir haben einen Eimer, in dem ein leerer Eimer drin ist. Es gibt 2^n Teilmengen von einer Menge mit n Elementen, also in diesem Fall $2^1 = 2$. Die Teilmengen einer Menge A mit einem Element sind die leere Menge $\varnothing$ und die Menge, die das einzige Element aus A enthält, also $\{\varnothing\}$ (weil das einzige Element in A $\varnothing$ ist).
Bei 2. verwenden wir zunächst die Definition von $\cup$:

$$(\{\{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing\}) \times \{\varnothing, \varnothing\} = (\{\{\varnothing\}, \varnothing\}) \times \{\varnothing, \varnothing\}.$$

Weil Mengen jedes Objekt nur einmal enthalten können und Mehrfachaufzählungen somit redundant sind, führen wir noch folgende Umformung durch:

$$(\{\{\varnothing\}, \varnothing\}) \times \{\varnothing, \varnothing\} = (\{\{\varnothing\}, \varnothing\}) \times \{\varnothing\}$$

Nun bilden wir das kartesische Produkt zweier Mengen, das heisst wir listen alle Paare auf, wobei das linke Element des Paars von der linken Menge kommt und das rechte Element des Paars aus der rechten Menge.
Bei 3. wenden wir auch zunächst die Definition von $\cup$ an:

$$\{\varnothing, (0,1)\} \times \{\{0\} \cup \{1\}, \{1,0\}\} = \{\varnothing, (0,1)\} \times \{\{0,1\}, \{1,0\}\}$$

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Demnach $\{0,1\} = \{1,0\}$. Mit $\{a,a\} = \{a\}$ folgt diese Umformung:

$$\begin{aligned}\{\varnothing, (0,1)\} \times \{\{0,1\}, \{1,0\}\} &= \{\varnothing, (0,1)\} \times \{\{0,1\}, \{0,1\}\} \\ &= \{\varnothing, (0,1)\} \times \{\{0,1\}\}\end{aligned}$$

Dann bilden wir das kartesische Produkt wie in 2.
4. ist leicht, wenn wir den Unterschied zwischen den beiden Mengen sehen: Die linke Menge enthält zwei Elemente, 0 und 1. Die rechte Menge enthält nur ein Element, das Paar $(0, 1)$. Das kartesische Produkt bildet man jetzt analog zu 2.
Bei 5. ist eine Menge A mit zwei Elementen gegeben, $\varnothing$ und $\{\varnothing\}$. Also hat das Power-Set $2^2 = 4$ Elemente. Die Elemente sind die leere Menge, A selbst und die beiden Mengen, die genau ein Element aus A enthalten, also die Mengen $\{\varnothing\}$ und $\{\{\varnothing\}\}$.

5 Beweise von Mengeneigenschaften

Es gibt verschiedene Methoden, wie man Eigenschaften von Mengen beweist. Wir müssen unterscheiden, ob wir eine Aussage zeigen oder widerlegen. Falls man eine wahre Aussage beweisen will, kann man zum einen die Gleichheiten aus Theorem 3.4 verwenden. Aber diese reichen für kompliziertere Eigenschaften, die das kartesische Produkt und das Power-Set involvieren, nicht aus. **Ausserdem ist es bei der aktuellen Bonusaufgabe verboten, diese zu verwenden.** Die Alternative funktioniert über die Definitionen von $\subseteq$, $\cup$, (...) und manipuliert prädikatenlogische Formeln. Wenn man hingegen eine Eigenschaft von Mengen widerlegen will, gibt es nur eine Möglichkeit: Ein Gegenbeispiel zu zeigen und zu erklären.

5.1 Widerlegen mit Gegenbeispiel

Gegeben sei die folgende Aussage:

$$\text{Für alle Mengen } A, B \text{ und } C \text{ gilt:}$$
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$$

Im Folgendem ein beispielhafter, ausführlicher Beweis (wie er auch in der Bonusaufgabe erwartet wird):

Beweis. Die Aussage ist falsch. Weil die Aussage von der Form „für alle Mengen A, B und C (...)“ ist, verwenden wir, um sie zu widerlegen, das Proof Pattern „Beweis durch Gegenbeispiel“.
Betrachte die Mengen $A = B = C = \{\varnothing\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C &= (\{\varnothing\} \setminus \{\varnothing\}) \setminus \{\varnothing\} \\ &= \varnothing \setminus \{\varnothing\} \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}A \setminus (B \setminus C) &= \{\varnothing\} \setminus (\{\varnothing\} \setminus \{\varnothing\}) \\ &= \{\varnothing\} \setminus \varnothing \\ &= \{\varnothing\}\end{aligned}$$

Es gilt nach der Definition von Mengengleichheit $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, weil $\{\varnothing\}$ ein Element enthält, das $\varnothing$ nicht enthält, nämlich $\varnothing$. Also $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ □

5.2 Beweis durch Definitionen von Mengenoperationen und Logik

Gegeben sei die folgende Aussage:

$$\text{Für alle Mengen } A \text{ und } B \text{ gilt:}$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Um die Gleichheit von zwei Mengen zu zeigen, müssen wir die Definition von Mengengleichheit verwenden. Diese ist $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Eine Möglichkeit, die Gleichheit zu zeigen, lautet wie folgt: Wir betrachten ein beliebiges aber fixes X und zeigen, dass es in $\mathcal{P}(A \cap B)$ enthalten ist genau dann, wenn es in $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ enthalten ist.

Beweis.

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\overset{\cdot}{\iff} X \subseteq A \cap B \text{ (Def. } \mathcal{P}) \\
&\overset{\cdot}{\iff} \forall a(a \in X \to a \in A \cap B) \text{ (Def. } \subseteq) \\
&\overset{\cdot}{\iff} \forall a(a \in X \to (a \in A \wedge a \in B)) \text{ (Def. } \cap) \\
&\overset{\cdot}{\iff} \forall a(\neg(a \in X) \vee (a \in A \wedge a \in B)) \text{ (Def. } \to) \\
&\overset{\cdot}{\iff} \forall a((\neg(a \in X) \vee a \in A) \wedge (\neg(a \in X) \vee a \in B)) \text{ (second distributive law)} \\
&\overset{\cdot}{\iff} \forall a((a \in X \to a \in A) \wedge (a \in X \to a \in B)) \text{ (Def. } \to) \\
&\overset{\cdot}{\iff} (\forall a(a \in X \to a \in A)) \wedge (\forall a(a \in X \to a \in B)) \; (\forall x(F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)) \\
&\overset{\cdot}{\iff} X \subseteq A \wedge X \subseteq B \text{ (Def. } \subseteq) \\
&\overset{\cdot}{\iff} X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \text{ (Def. } \mathcal{P}) \\
&\overset{\cdot}{\iff} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \text{ (Def. } \cap)
\end{aligned}$$

□

Es ist bei solchen Aufgaben auch möglich (und machmal erforderlich), mit Worten zu argumentieren. Dann muss man aber trotzdem ganz genau angeben, welche Definitionen und Resultate man bei seiner Argumentation aus dem Skript verwendet. Für kompliziertere Mengenaussagen und für Implikationen über Mengen, kann man ausserdem die Proof Pattern aus dem Skript verwenden. Manchmal könnte es einfacher sein, eine Fallunterscheidung oder einen indirekten Beweis zu machen.