Diskrete Mathematik Übungsstunde Zusammenfassung

Leon Kolmanić

23.10.2023

1 Besprechung Bonusaufgabe

a)

Häufige Fehler bei der a) waren:

- Menge ohne $x \in$ neben $\overset{\cdot}{\iff}$ geschrieben
(z.B. $A \setminus (B \setminus C) \overset{\cdot}{\iff} x \in A \land \neg x \in B \setminus C$)

- Mengen und Aussagen vermischt, logische Operatoren und Mengenoperationen synonym verwendet (z.B. $A \cap B \overset{\cdot}{\iff} A \land B$)

- Negation von $x \in A$ falsch aufgeschrieben ($x \neg \in A$ ist **falsch**, $\neg x \in A$ ist **richtig**)

- Schritte übersprungen bei Aussage über Teilmenge
(z.B. $X \subseteq A \land X \subseteq B \overset{\cdot}{\iff} X \subseteq A \cap B$)

- Mit $\overset{\cdot}{\implies}$ direkt hinter letzten Herleitungsschritt gezeigte Aussage geschrieben

- Mengennotation verwendet (kein Fehler, macht die Herleitung aber unübersichtlicher)
(z. B. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{x \in B \mid x \notin C\}$)

Es ist wichtig, dass wir zwischen Mengen und Aussagen unterscheiden. $A \setminus (B \setminus C)$ ist eine Menge, keine Aussage. Wir können diese nicht mit $\overset{\cdot}{\iff}$ umformen, sondern nur mit =. Es ist korrekt, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ zu schreiben, aber falsch $A \cap (B \cup C) \overset{\cdot}{\iff} (A \cap B) \cup (A \cap C)$ zu schreiben. Wenn wir zeigen wollen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, indem wir Aussagen umformen, können wir mit $x \in A$ anfangen, und durch Umformungen mit $\overset{\cdot}{\iff}$ zu $x \in B$ gelangen, da $x \in A$ und $x \in B$ Aussagen sind.
Weiter darf man nicht die Mengenoperationen wie $\cap$ und $\cup$ mit den logischen Operatoren $\land$ und $\lor$ verwechseln. Logische Operatoren dürfen nur zwischen

zwei Formeln/Aussagen stehen[1], während Mengenoperationen nur zwischen zwei Mengen stehen dürfen. $\cap$ in einer Aussage durch $\wedge$ zu ersetzen, ist keine korrekte Anwendung der Definition von $\cap$. Was möglich ist, ist die Umformung $x \in A \wedge x \in B \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap B$. Hier muss man aufpassen, dass man das $x \in$ nicht vergisst. $x \in A \wedge x \in B \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} A \cap B$ ist falsch, weil rechts eine Menge steht und links eine Aussage.
Obwohl $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \iff X \subseteq A \cap B$ für alle Mengen A und B gilt, kann man das nicht direkt aus der Definition von $\cap$ folgern. Diese Aussage steht auch nicht im Skript, deshalb muss man sie selber beweisen, damit man sie zur Umformung in einem Beweis verwenden darf.
Wir können nicht hinter den letzten Schritt einer Herleitung $\overset{\cdot}{\Longrightarrow}$ schreiben, um zusammenzufassen, was wir gezeigt haben. Wenn wir das so schreiben, drücken wir aus, dass wir die zu zeigende Aussage aus dem letzten Herleitungsschritt folgern können ($\overset{\cdot}{\Longrightarrow}$ bezieht sich auf die Zeile unmittelbar davor). Wir wollen aber ausdrücken, dass wir die zu zeigende Aussage aus der gesamten Herleitung folgern können. Also schreiben wir lieber „Insgesamt haben wir ... gezeigt“. Generell müsst ihr aber nie nach einer Herleitung noch mal wiederholen, was ihr gezeigt habt. Das kostet euch in der Klausur nur Zeit.
Einige von euch haben die gegebenen Mengen umgeformt, statt über die Umformung von Aussagen zu argumentieren. Das macht die Herleitung unübersichtlicher und es ist nicht möglich, Lemma 2.1 sauber auf die vorkommenden Formeln anzuwenden. Deswegen empfehle ich euch, euch an dem Format der Musterlösung zu orientieren.

b)

Häufige Fehler bei der b) waren:

- Nicht ausreichend/präzise argumentiert
- Resultat aus Aufgabe 4.6 a) ohne Beweis verwendet

Wenn ihr einen Beweis in Worten führt, müsst ihr sehr ausführlich sein. Achtet darauf, dass ihr statt unpräzisen Begriffen wie „in“ die korrekten Fachbegriffe „Element“ und „Teilmenge“ verwendet. Alles, was nicht offensichtlich ist und nicht im Skript steht, müsst ihr selber beweisen. Es reicht in einem Beweis nie aus, etwas anhand eines Beispiels zu erklären (ausser natürlich, ihr widerlegt mittels Gegenbeispiel).
Ihr könnt in der Klausur und den Bonusaufgaben nicht auf Resultate aus anderen Übungsaufgaben und den Übungsstunden verweisen. Wenn ihr etwas verwenden wollt und euch nicht sicher seid, ob ihr das dürft, fragt gerne mich. Bei dieser Aufgabe konntet ihr die Aussage von 4.6 a) nur verwenden, wenn ihr sie selber gezeigt habt.

[1] Wir verwenden in diesem Kapitel ausnahmsweise logische Operatoren, um Aussagen zu notieren. Der Grund wird in meiner Zusammenfassung letzter Woche diskutiert: `https://leonkolmanic.com/dm_summary_4.pdf`. Im Allgemeinen sind Formeln keine Aussagen.

c)

Hier wurde nur der Fehler gemacht, dass das Gegenbeispiel nicht gültig war. Ein korrektes Gegenbeispiel für eine Implikation $S \Longrightarrow T$ muss so gewählt sein, dass S wahr ist und T falsch ist. Wenn euer Beispiel nicht gültig ist, bekommt ihr leider gar keine Punkte.

Alternativer Lösungsvorschlag für b)

Weil der Beweis in der Musterlösung sehr kurz ist und um generell Beweise von Mengenaussagen zu illustrieren, hier noch ein alternativer Beweis der b).

Beweis. Wir beweisen die Implikation indirekt. Man nehme an, dass $|A \cap B| \neq 1$. Weil Kardinalitäten natürliche Zahlen sind, erhalten wir die folgenden Fälle:

Fall 1: $|A \cap B| = 0$ Aus der Definition der Kardinalität folgt, dass $A \cap B$ die leere Menge ist. Man nehme nun zwecks Widerspruch an, dass $|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| = 2$. Wegen der Definition der Kardinalität und des Schnitts folgt, dass es X und Y gibt, mit $X \neq Y$, $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \in \mathcal{P}(B)$, $Y \in \mathcal{P}(A)$ und $Y \in \mathcal{P}(B)$. Nach Definition von $\mathcal{P}$ folgt, dass X und Y Teilmengen von A und B sind. Weil $X \neq Y$, ist eine der Mengen X und Y nicht die leere Menge. Man nehme ohne Verlust der Allgemeinheit an, dass X nicht die leere Menge ist. Dann gibt es ein x, sodass $x \in X$. Weil X Teilmenge von A und B ist folgt $x \in A$ und $x \in B$. Also auch $x \in A \cap B$. Aber per Annahme ist $A \cap B$ die leere Menge, das ist ein Widerspruch. Also haben wir $|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| \neq 2$ per Widerspruch gezeigt.

Fall 2: $|A \cap B| \geq 2$ Aus der Definition der Kardinalität folgt, dass es x und y gibt, mit $x \neq y$, $x \in A \cap B$ und $y \in A \cap B$. Wegen der Definition des Schnitts folgt $x \in A$, $x \in B$, $y \in A$ und $y \in B$. Also nach der Definition von Teilmenge auch $\{x\} \subseteq A$, $\{x\} \subseteq B$, $\{y\} \subseteq A$ und $\{y\} \subseteq B$. Schliesslich folgt mit den Definitionen von $\mathcal{P}$ und $\cap$: $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ und $\{y\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Weil $\varnothing$ Teilmenge jeder Menge ist, folgt ausserdem mit den Definitionen von $\mathcal{P}$ und $\cap$: $\varnothing \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Weil wir drei verschiedene Elemente von $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ gefunden haben, nämlich $\varnothing$, $\{x\}$ und $\{y\}$, folgt mit der Definition der Kardinalität $|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| \neq 2$

□

2 Übungsaufgabe zu Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

Wir wollen folgendes Theorem zeigen:

Theorem. *Sei θ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Für alle $a \in A$ und $b \in A$ gilt:*

$$a \, \theta \, b \iff [a]_\theta = [b]_\theta$$

Es ist bei solchen Aufgaben wichtig, sich nicht von einer kompliziert aussehenden Aussage erschlagen zu lassen. Die Beweise sind meistens sehr einfach, wenn man alle in der Aussage vorkommenden Definitionen verstanden hat. Bei dieser Aufgabe müssen wir die Definition von $[a]_\theta$ kennen. Für eine Äquivalenzrelation θ auf einer Menge A und ein Element $a \in A$ ist $[a]_\theta$ die *Äquivalenzklasse* von a, also die Menge aller Elemente, die zu a äquivalent sind (im Sinne dieser Äquivalenzrelation). Wenn wir ein Beispiel betrachten, wird uns direkt klar, dass das Theorem wahr ist: Betrachten wir eine Menge von Boxern und die Äquivalenzrelation, die wie folgt definiert ist: Zwei Boxer sind äquivalent, wenn sie in der gleichen Gewichtsklasse sind. In diesem Beispiel sind die Äquivalenzklassen die Gewichtsklassen. Für einen Boxer a ist also $[a]_\theta$ die Menge der Boxer, die in der gleichen Gewichtsklasse sind wie a, also einfach die Gewichtsklasse von a. Das Theorem besagt nun: Zwei Boxer sind in der gleichen Gewichtsklasse (äquivalent) genau dann, wenn ihre Gewichtsklassen gleich sind. Das ist offensichtlich wahr.
Um das Theorem zu zeigen, müssen wir mit den Definitionen von Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen arbeiten.

Beweis. Sei θ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Wir zeigen beide Richtungen der Implikation einzeln.

Richtung $\Longrightarrow$ Seien $a \in A$ und $b \in A$ beliebig, sodass $a \,\theta\, b$.
Weil θ symmetrisch ist, folgt $b \,\theta\, a$. Wir zeigen $[a]_\theta \subseteq [b]_\theta$: Sei $c \in [a]_\theta$ beliebig.

$$\begin{aligned} c \in [a]_\theta &\overset{.}{\Longrightarrow} c \,\theta\, a \text{ (Def. Äquivalenzklassen)} \\ &\overset{.}{\Longrightarrow} c \,\theta\, b \text{ (} a \,\theta\, b \text{ und Transitivität von } \theta \text{)} \\ &\overset{.}{\Longrightarrow} c \in [b]_\theta \text{ (Def. Äquivalenzklassen)} \end{aligned}$$

Um $[b]_\theta \subseteq [a]_\theta$ zu zeigen, sehen wir, dass die Herleitung auch funktioniert, wenn wir a und b vertauschen.

Richtung $\Longleftarrow$ Seien nun $a \in A$ und $b \in A$ beliebig, sodass $[a]_\theta = [b]_\theta$. Weil θ reflexiv ist, gilt $a \,\theta\, a$.

$$\begin{aligned} a \,\theta\, a &\overset{.}{\Longrightarrow} a \in [a]_\theta \text{ (Def. Äquivalenzklassen)} \\ &\overset{.}{\Longrightarrow} a \in [b]_\theta \text{ (} [a]_\theta = [b]_\theta \text{)} \\ &\overset{.}{\Longrightarrow} a \,\theta\, b \text{ (Def. Äquivalenzklassen)} \end{aligned}$$

$\square$

Wenn man einen weiteren Beweis für ein Theorem über Äquivalenzklassen sehen will, kann ich den Beweis von Theorem 3.11 aus dem Skript empfehlen.

3 Beweise zu Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen

Wenn wir beweisen müssen, dass eine bestimmte Relation auf einer Menge eine Äquivalenzrelation ist, gehen wir immer gleich vor: Wir zeigen nacheinander alle drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation, also Reflexivitiät, Symmetrie und Transitivitiät. Die Beweise der jeweiligen Eigenschaften, unterscheiden sich dadurch, was wir annehmen dürfen und was wir zeigen müssen. Analoges gilt für eine Ordnungsrelation. In den folgenden Tabellen ist das Vorgehen zusammengefasst. Jede Zeile in den Tabellen entspricht einem Teil vom Beweis, den man durchführen muss.

3.1 Beweis Äquivalenzrelation

Eigenschaft	Annahmen	Zu zeigen
Reflexivität	$a \in A$ beliebig	$a\,\theta\,a$
Symmetrie	$a \in A$ und $b \in A$ sodass $a\,\theta\,b$	$b\,\theta\,a$
Transitivität	$a \in A$, $b \in A$ und $c \in A$ sodass $a\,\theta\,b$ und $b\,\theta\,c$	$a\,\theta\,c$

3.2 Beweis Ordnungsrelation

Eigenschaft	Annahmen	Zu zeigen
Reflexivität	$a \in A$ beliebig	$a \preceq a$
Antisymmetrie	$a \in A$ und $b \in A$ sodass $a \preceq b$ und $b \preceq a$	$a = b$
Transitivität	$a \in A$, $b \in A$ und $c \in A$ sodass $a \preceq b$ und $b \preceq c$	$a \preceq c$

4 Übungsaufgabe zu Ordnungsrelationen

Im Skript ist das *direkte Produkt* zweier Posets wie folgt definiert (Definition 3.28):

Definition. *Das* direkte Produkt *von zwei Posets* $(A; \preceq)$ *und* $(B; \sqsubseteq)$*, geschrieben* $(A; \preceq) \times (B; \sqsubseteq)$*, ist die Menge* $A \times B$ *mit der Relation* $\leq$ *(auf* $A \times B$*) definiert durch*

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \overset{def}{\iff} a_1 \preceq a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$$

Nun wollen wir Theorem 3.12 zeigen:

Theorem. $(A; \preceq) \times (B; \sqsubseteq)$ *ist ein Poset.*

Auch hier darf man sich nicht von den vielen verschiedenen Zeichen verwirren lassen. Der Beweis ist einfach und verwendet nur die Eigenschaften von Ordnungsrelationen. Bei Aufgaben wie dieser, bei der man eine Relation mit einer bestimmten Definition gegeben hat, müssen wir diese, um jede Eigenschaft zu zeigen, verwenden. Bei dieser speziellen Aufgabe ist es ausserdem wichtig zu beachten, dass die Menge, auf der die Relation definiert ist, von der wir zeigen wollen, dass sie eine Ordnungsrelation ist, $A \times B$ ist. Wir werden es hier bei den Elementen der Menge also mit Paaren zu tun haben.

Beweis. Seien $(A; \preceq)$ und $(B; \sqsubseteq)$ beliebige Posets. Sei $(A \times B; \leq)$ das direkte Produkt der beiden Posets.

Reflexivität Sei $(a, b) \in A \times B$ beliebig. Aufgrund der Reflexivitiät von $\preceq$ gilt: $a \preceq a$. Weiter gilt aufgrund der Reflexivität von $\sqsubseteq$: $b \sqsubseteq b$. Per Definition von $\leq$ folgt $(a, b) \leq (a, b)$.

Antisymmetrie Seien $(a_1, b_1) \in A \times B$ und $(a_2, b_2) \in A \times B$ beliebig, sodass $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ und $(a_2, b_2) \leq (a_1, b_1)$. Aus der Definition von $\leq$ folgt $a_1 \preceq a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$ und $a_2 \preceq a_1 \wedge b_2 \sqsubseteq b_1$. Weil $a_1 \preceq a_2$ und $a_2 \preceq a_1$ folgt mit der Antisymmetrie von $\preceq$ $a_1 = a_2$. Weil $b_1 \sqsubseteq b_2$ und $b_2 \sqsubseteq b_1$ folgt mit der Antisymmetrie von $\sqsubseteq$ $b_1 = b_2$. Aus der Definition der Gleichheit von Paaren folgt $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

Transitivität Seien $(a_1, b_1) \in A \times B$, $(a_2, b_2) \in A \times B$ und $(a_3, b_3) \in A \times B$ beliebig, sodass $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ und $(a_2, b_2) \leq (a_3, b_3)$. Aus der Definition von $\leq$ folgt $a_1 \preceq a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$ und $a_2 \preceq a_3 \wedge b_2 \sqsubseteq b_3$. Aus $a_1 \preceq a_2$ und $a_2 \preceq a_3$ folgt mit der Transitivität von $\preceq$: $a_1 \preceq a_3$. Aus $b_1 \preceq b_2$ und $b_2 \preceq b_3$ folgt mit der Transitivität von $\sqsubseteq$: $b_1 \sqsubseteq b_3$. Aus $a_1 \preceq a_3$ und $b_1 \sqsubseteq b_3$ folgt mit der Definition von $\leq$: $(a_1, b_1) \leq (a_3, b_3)$.

$\square$